30/04/2018

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

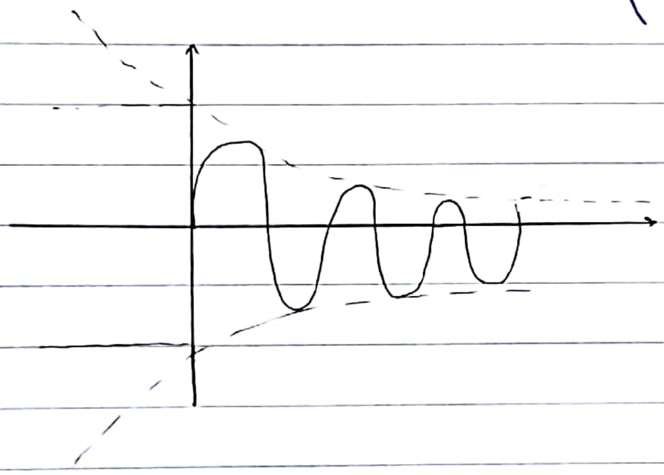
$$\underbrace{\ddot{x}+\dot{x}}_{\text{λειτουργεί ως τριβή}}+x=0.$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p^2+p+1=0 \Rightarrow p=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Συνεπώς η λύση είναι της μορφής:

$$e^{pt}=e^{-1/2\,t+i\sqrt{3}/2\,t}=e^{-1/2\,t}\cdot\underbrace{e^{i\sqrt{3}/2\,t}}_{\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}$$



Διάγραμμα Φάσης:

Έστω ότι οι ιδιοτιμές έχουν την μορφή

$\lambda=p+iq$, $\bar{\lambda}=p-iq$ και αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα

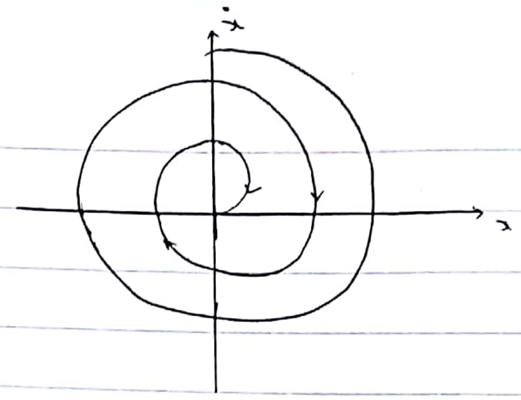
$\vec{v}=\vec{a}+i\vec{b}$, $\vec{v}^{*}=\vec{a}-i\vec{b}$, τότε οι λύσεις είναι της μορφής

$$\vec{x}(t)=e^{pt}\left(\vec{a}\cos qt-\vec{b}\sin qt\right)$$

ή

$$\vec{x}(t)=e^{pt}\left(\vec{b}\cos qt+\vec{a}\sin qt\right)$$

Οι λύσεις αυτές στο χώρο των φάσεων αντιστοιχούν σε σπειροειδή



- Αν το $\rho>0$ τότε το σημείο $(0,0)$ είναι πηγή

- Αν το $\rho<0$ τότε το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο συσσώρευσης.

- Στην περίπτωση που $\rho=0$ έχουμε φανταστικές ιδιοτιμές τότε ο χώρος των φάσεων είναι κλειστές ελλείψεις και σταθερό κέντρο.

Συνοπτικά:

- $\lambda_1<\lambda_2<0$ ευσταθής κόμβος

- $\lambda_1=\lambda_2<0$ ευσταθής κόμβος ή σπειροειδής

- $\lambda_1<0<\lambda_2$ ασταθές σαγματικό

- $\lambda_1=\lambda_2>0$ ασταθής κόμβος ή σπειροειδής

- $\lambda_1>\lambda_2>0$ ασταθής κόμβος

- $\lambda_1=\lambda_2=\alpha\pm ib$ ασταθής σπειροειδής
  $(\alpha>0)$
  $(\alpha<0)$ ευσταθής σπειροειδής

- $\lambda_1,\lambda_2=\pm ib$ κέντρο ή σπειροειδής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Η εξίσωση : $m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + ex^3$

αντιστοιχεί σε ένα μη γραμμικό ελατήριο που υπόκειται σε τριβές ανάλογες της ταχύτητας.

Η μέθοδος πολλαπλασιάζω με $\dot{x}$ και ολοκληρώνω αποτυγχάνει.

διότι δεν ξέρω τι να κάνω τον όρο $\int \dot{x}^2 \, dt = ?$

Παρατήρηση: θυμάμαι την αντικατάσταση που συνδέει την παράγωγο ως προς t με μια παράγωγο ως προς x.

Δηλαδή $w(x) = \dot{x} \Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \ddot{x} = w' \underbrace{\dot{x}}_{w}$

Τελικά: $m \cdot w' \cdot w = -cw - kx + ex^3 \Rightarrow \boxed{m \cdot w \cdot w' + cw = -kx + ex^3}$

ρίχνω κατά 1 την τάξη της εξίσωσης.

▶ Πως θα το σχεδιάσουμε?

Γράφουμε την εξίσωση ως σύστημα, δηλαδή θέτω $y = \dot{x}$

Άρα έχω: $\left.\begin{array}{l} m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + ex^3 \\ y = \dot{x} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x} = y = f(x,y) \\ \dot{y} = -\frac{cy}{m} - \frac{kx}{m} + \frac{ex^3}{m} = g(x,y) \end{array}\right.$

τα σταθερά σημεία : $\left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ -\frac{kx}{m} + \frac{ex^3}{m} = 0 \Rightarrow \frac{x(-k+ex^2)}{m} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \text{ ή } x^2 = \frac{k}{e} \end{array}\right.$

(ίδιον ισχύει να είναι μηδενικό)

Η Ιακωβιανή είναι η:

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k + 3ex^2 & -c \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{pmatrix}, \quad J\left(\pm\sqrt{\frac{k}{e}}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2k/m & -c/m \end{pmatrix}$$

Άρα:

- Στο σημείο (0,0) οι ιδιοτιμές είναι: $\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$

  (i) $c^2 - 4km > 0$, σημείο συσσώρευσης

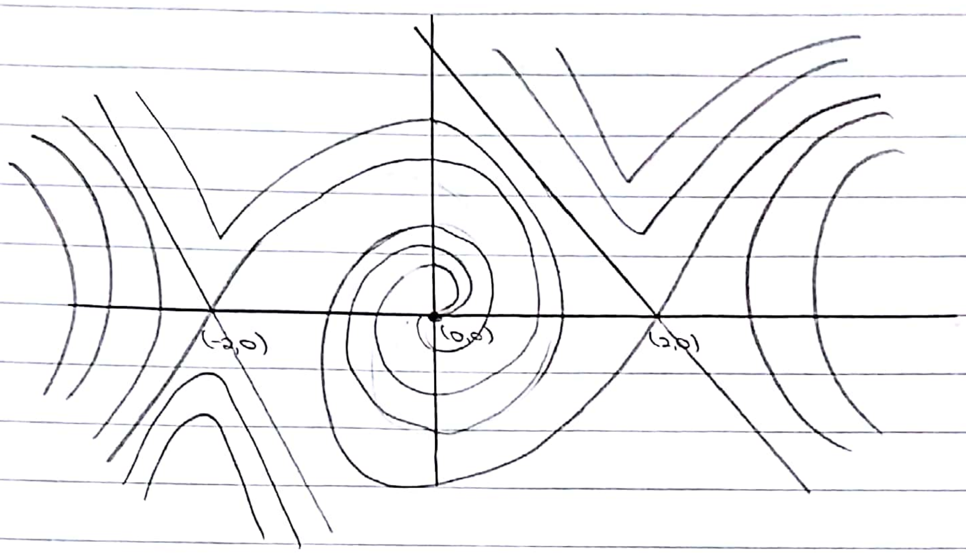
  (ii) $c^2 - 4km < 0$, σπειροειδής συσσώρευση.

• $\left(\pm\sqrt{\frac{k}{\ell}}, 0\right)$: $\lambda = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2+8k\omega}}{2\omega}$.

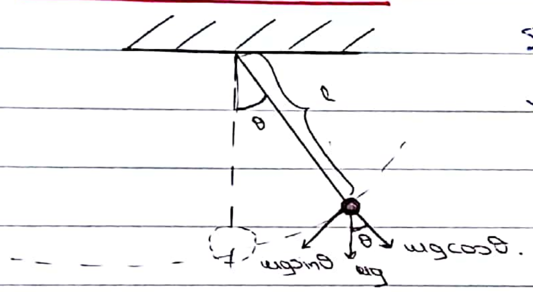
(π.χ) $\omega=1,\ c=2,\ k=5,\ \ell=5/4$

$\lambda_+ > 0,\ \lambda_- < 0$

έχω δύο ασταθή σαγματικά σημεία.



Το απλό εκκρεμές:



Σε μορφή διανυσμάτων κίνηση (πολικές συντεταγμένες) η επιτάχυνση είχαμε δει να είναι:

$$\vec{a} = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2]\,\hat{r} + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}]\,\hat{\theta}$$

$$= a_r\,\hat{r} + a_\theta\,\hat{\theta}$$

Στη διεύθυνση της κίνησης: $mg\sin\theta = m.a_\theta \Leftrightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = g\sin\theta$.

$r = \ell$ = σταθερό και άρα $\ddot{\theta} = \frac{g}{\ell}\sin\theta$.

ή θέτοντας $\omega^2 = \frac{g}{\ell} > 0$, $\ddot{\theta} - \omega^2\sin\theta = 0$

Γράφω την εξίσωση σε μορφή συστήματος: $\begin{cases} x=\theta \\ \dot{\theta}=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=\omega^2\sin x \end{cases}$

Αναζητώ τα σταθερά σημεία: $\begin{cases} y=0 \\ \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\dots \end{cases}$

Η Ιακωβιανή είναι:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 \cos x & 0 \end{pmatrix}$$

και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

▶ n = άρτιος : Αν $n=2m$, $\cos(n\pi)=1$

$$J(2m\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2+\omega^2=0$$, φανταστικές (κέντρα κλειστών τροχιών)

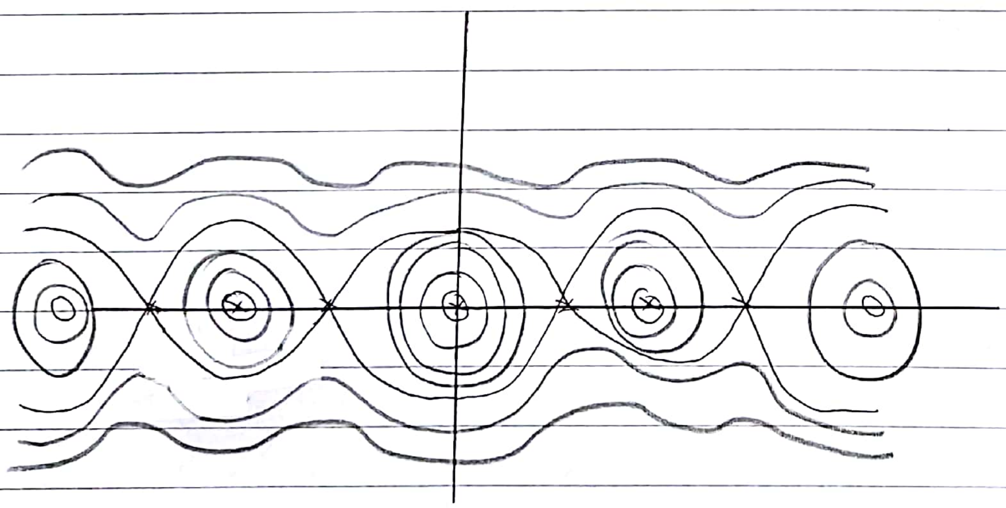
▶ n περιττός : $n=2m+1$ $\quad \cos(n\pi) = -1$

$$J(2m+1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2=\omega^2$$ σαγματικά σημεία

Μορφή Τροχιών:

$$\ddot\theta\dot\theta - \omega^2 \sin\theta\,\dot\theta = 0 \Rightarrow \frac{\dot\theta^2}{2} + \omega^2\cos\theta = E$$

Θεωρώ $\begin{cases} \theta(0)=\theta_0 \\ \dot\theta(0)=0 \end{cases}$ τότε $E = \omega^2\cos\theta_0$



Η λύση της Εξίσωσης:

(Αν καταφέρω να λύσω την εξίσωση του εκκρεμούς)

Γνωρίζουμε: $\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \omega^2 \cos\theta = E = \omega^2 \cos\theta_0 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = 2\omega^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)$

[illegible]

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta} \Rightarrow \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = \omega\sqrt{2}\, dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = \int_0^{T} \omega\sqrt{2}\, dt$$

Αριστερά το ολοκλήρωμα καλείται ελλειπτικό ολοκλήρωμα και μπορεί να υπολογιστεί σε μορφή σειράς.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx \simeq \int \left(1 + \frac{x}{2}\right) dx = \dots$$

Θυμάμαι: $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{x}{2} + \dots$

$(1+x)^n \simeq 1 + nx$ ← Διωνυμικό ανάπτυγμα

Επομένως, η περίοδος $T = \frac{2\pi}{\omega}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^2(\theta_0/2) + \dots\right]$

Αν λοιπόν έχω μικρές γωνίες (απειροστές) $\theta_0 \simeq 0$ τότε $T = \frac{2\pi}{\omega}$

εκτελεί αρμονική ταλάντωση. (ανεξάρτητη από την αρχική γωνία εκτροπής)